$$\begin{cases} f(\ell)=\ell \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\ell}{\ell^2+\ell+1}=\ell \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell=\ell^3+\ell^2+\ell \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell^3+\ell^2=0 \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell^2(\ell+1)=0 \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell=0 \text{ ou } \ell=-1 \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

(U_n) *est une suite convergente vers* 0

2°/

a) $*f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2+n+1}{n^2}}=\dfrac{n}{n^2+n+1}$

$$*f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n^2+n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{-1}{\left(n^2+n+1\right)(n+1)} < 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}$$

D'où : $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$

b) * $U_0 \leq 1$ vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

Montrons que $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$

On a : $U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

Or f est strictement croissante sur [0 , 1]

D'où : $f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

$0 \leq U_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$ (d'après 2°/ a))

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$